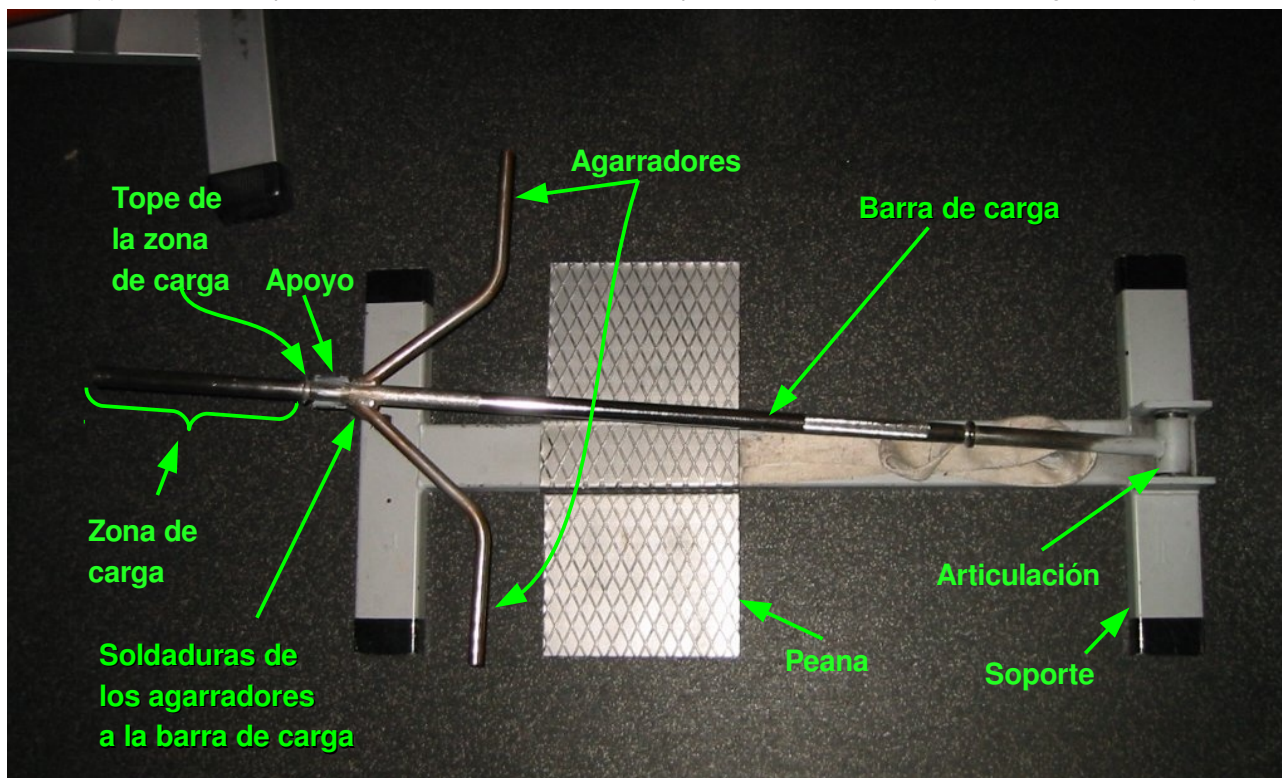


UN PROBLEMA PARA EL CURSO

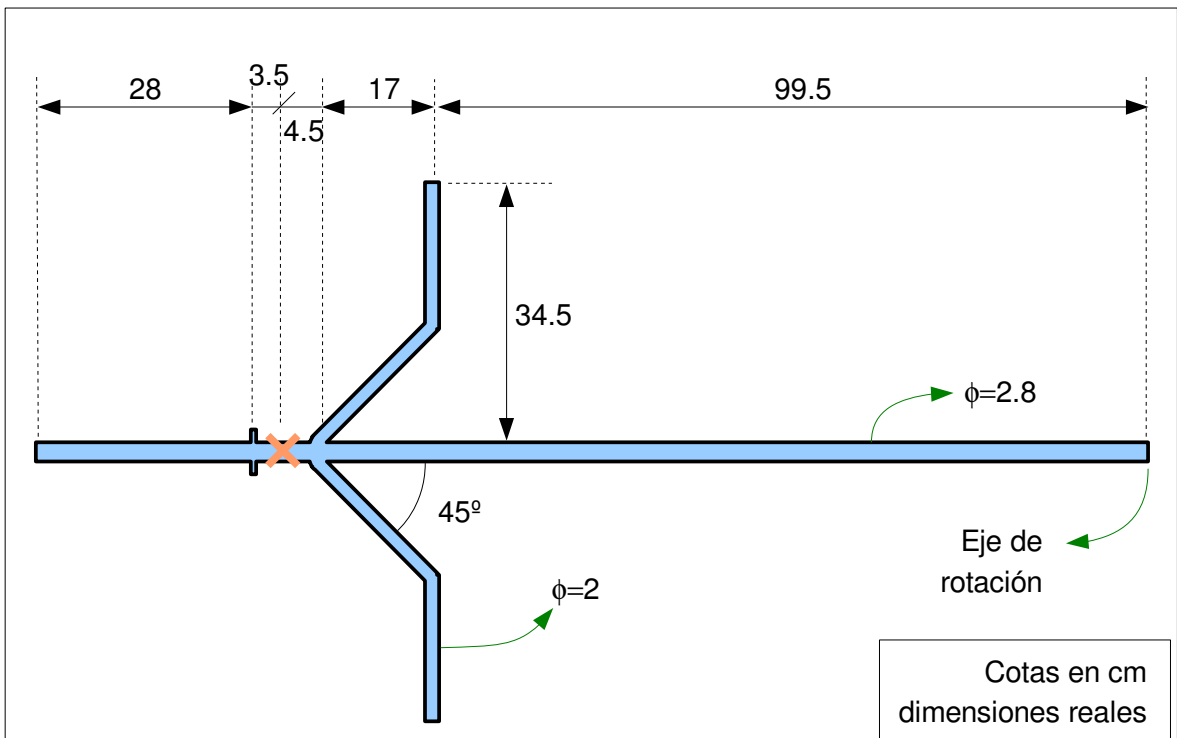
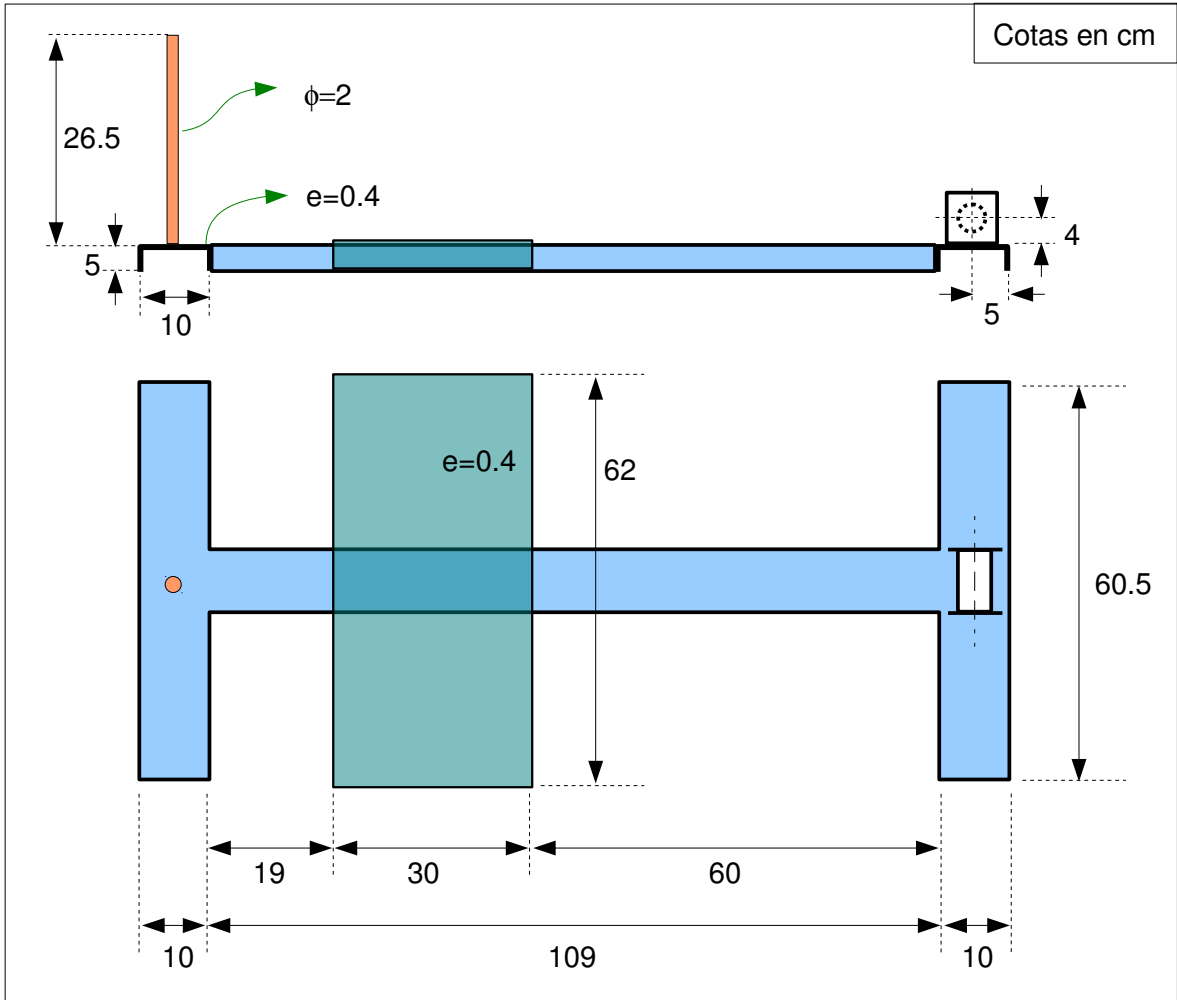
El aparato de gimnasia para “Remo en Punta” (*) que muestran las fotografías apoya directamente sobre el suelo, sin ninguna otra unión con el mismo. Consta básicamente de un soporte inferior formado por barras de sección en “C”, y una barra de sección circular conectada por su extremo al soporte anterior mediante una articulación. Esta barra se carga con pesas en el extremo opuesto al de la articulación. El ejercicio consiste en asir la barra cargada (véanse los agarradores al respecto), y levantar las pesas haciendo pivotar la barra en torno a la articulación, tal como indica la imagen pequeña.



(*) El acceso al aparato ha sido amablemente facilitado por el Gimnasio Sforza (La Cistérniga, Valladolid).



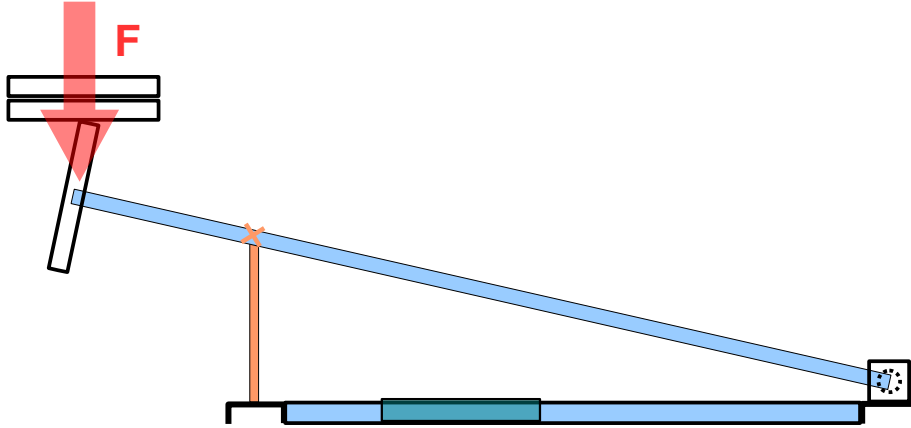
DIMENSIONES



Cotas en cm
dimensiones reales

SUPUESTO 1

Se ha apreciado que la barra de carga, los agarradores, la barra vertical de apoyo, y la peana son de acero (asumiremos densidad=7900 kg/m³). Se desconoce si los perfiles "en C" que forman el soporte son también de acero, o no. Como no se dispone de una báscula, lo que permitiría otro enfoque más directo para averiguarlo, se realizó el siguiente experimento:

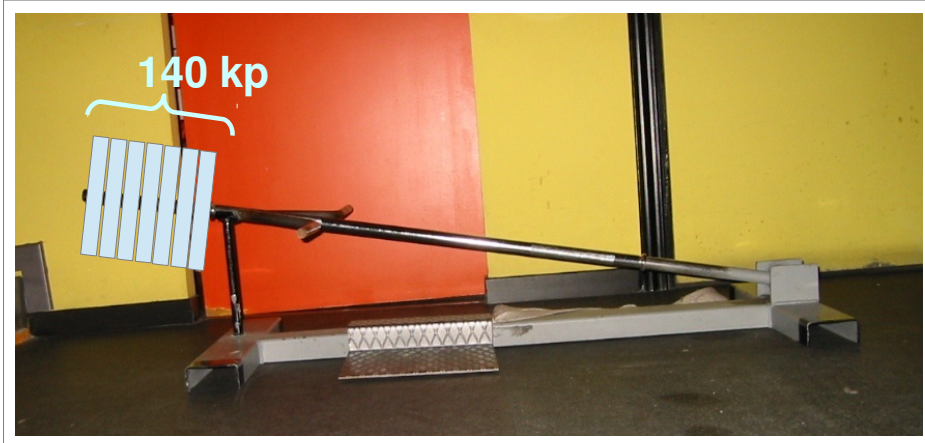


Con el cuidado que fue posible, y procurando manualmente por su equilibrio, se colocaron pesas de 20kp en el extremo de la barra de carga, de la manera que se indica. Se asume que el efecto conseguido es el de una fuerza concentrada sobre dicho extremo. Se apreció que el aparato se mantenía estable hasta con tres pesas, pero presentaba tendencia a volcar (de haberlo permitido) cuando se procedía a intentar colocar la cuarta pesa.

Suponiendo adicionalmente que el pequeño aparataje auxiliar de la articulación pesa 0.25 kp, se pide juzgar si los resultados del experimento anterior son compatibles con que el soporte sea también de acero, como el resto de los elementos.

SUPUESTO 2

Daremos por bueno que el soporte inferior sea también de acero. En la zona de carga pueden haber justo hasta 7 pesas de 20 kp. Se pide predecir si esa carga haría volcar el aparato.



SUPUESTO 3

Asumamos que la configuración del Supuesto 2 anterior corresponde justamente al estado límite en que el aparato no vuelca pero está a punto de hacerlo (para no sentirnos incómodos con la pequeña inconsistencia en el modelo, postulemos por ejemplo que el soporte tiene material hasta los 129,07cm que podemos haber obtenido como resultado, en lugar de los 129cm nominales). Asumimos también que no existe rozamiento entre ninguno de los elementos en contacto, ni en la articulación.

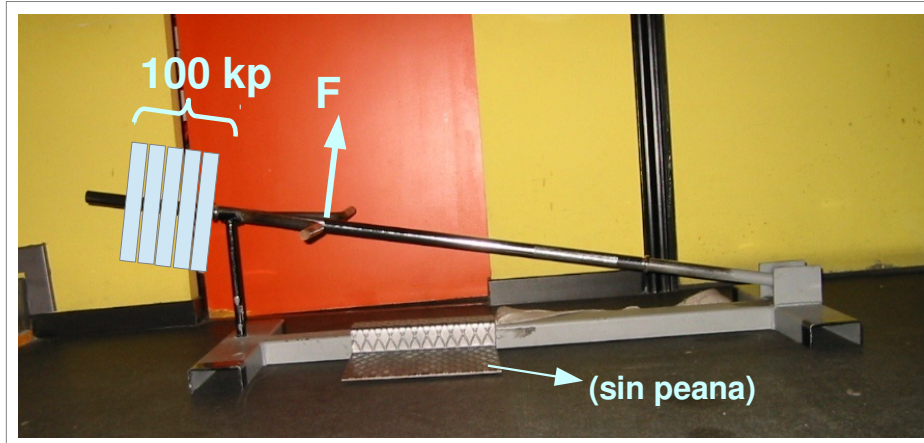
Queremos saber las fuerzas que se ejercen sobre la barra de carga. Ídem sobre la barra vertical.

Notas:

- En la respuesta, presentaremos como sistemas de cargas distribuidas aquellos que sensiblemente lo sean, en lugar de dar como resultado alguna reducción suya.
- NO despreciamos la carga que supone el peso propio de los agarradores (académicamente es interesante considerarla aunque su efecto vaya a ser pequeño). Tampoco despreciamos el peso propio de la barra de carga.

SUPUESTO 4

Asumamos en este supuesto que en diseño del aparato no estuviese incluida la peana. Consideremos el caso en que un usuario se dispone a realizar el ejercicio con carga de 100kp, la cual se distribuye a lo largo de los 20cm contiguos al tope de la zona de carga. El usuario realizará una fuerza perpendicularmente a la barra, como se indica.



Queremos calcular la resultante de las fuerzas que ejerce el suelo sobre el soporte, en el momento en que se empieza a levantar la barra de carga.

SUPUESTO 5

Queremos realizar un análisis similar al del supuesto anterior, también con 100 kp de carga, y considerando la situación en la que el usuario está a punto de elevar la barra de carga, pero esta vez con todos los elementos del aparato, incluida la peana. En particular, nos interesa conocer la fuerza ejercida por el usuario sobre la barra de carga, y la resultante de las fuerzas que ejerce el suelo sobre el aparato.

El peso del usuario es de 95kp, y la interacción de sus pies con la peana puede aproximarse por dos fuerzas concentradas que actúan en el centro de los respectivos espacios de la peana. El contacto de la peana con el soporte produce una carga constante distribuida en los 30 cm de soporte cubiertos por la peana. El contacto de los pies del usuario con la peana, así como el contacto de la propia peana y del soporte con el suelo, se producen con rozamiento, en cantidad suficiente para garantizar el equilibrio longitudinal de los elementos.

Nota: Sin mediciones o cálculos más avanzados, no podemos saber exactamente cómo actúa la peana, pero sí que podemos asegurar que su efecto será alguno intermedio comprendido entre estos dos casos límite:

- 1) El empuje de los pies del usuario es transmitido por la peana íntegramente al soporte, sin producirse realmente contacto de la peana con el suelo.
- 2) El empuje de los pies del usuario es transmitido mayoritariamente por la peana directamente al suelo, y sólo se transmite al soporte la parte de ese empuje necesaria para que el mismo no vuelque.

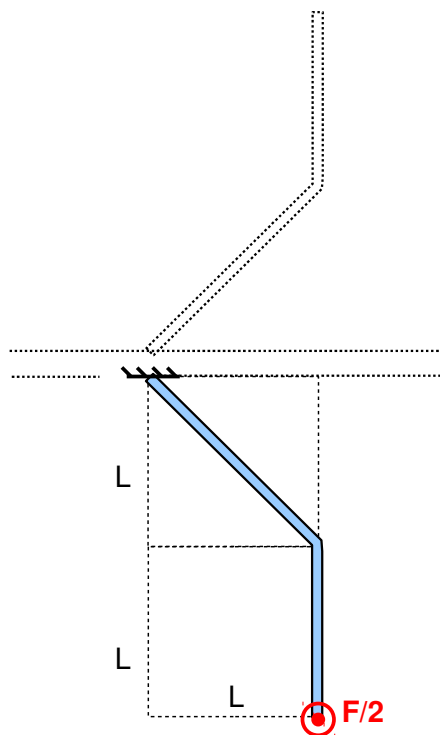
Ante la duda, respóndase a las preguntas del enunciado para cada uno de estos dos casos límite.

SUPUESTO 6

Analizaremos en este supuesto la resistencia de las barras que forman los agarradores. Basándonos en un cálculo rápido realizado a partir de la carga máxima que admite el aparato, asumimos que la mayor fuerza que podría ejercer un usuario sobre los agarradores es de $F=200$ kp, que se dividiría por mitades entre ambos. Consideramos que en el más desfavorable de los casos, la fuerza sobre cada agarrador actuaría en la posición que indica la figura, siendo $L=17$ cm.

Para ese caso, se pide el valor de la tensión tangencial máxima, y el valor de la tensión equivalente de von Mises, en el punto más solicitado del agarrador considerado. Realícese un breve juicio acerca de la posibilidad de que ocurriese plastificación en la barra.

Puede despreciarse el peso propio del agarrador en estos cálculos.



SUPUESTO 7

Continuando con el análisis de resistencia de los elementos del aparato, consideraremos la carga máxima que el mismo admite (140 kp), y a un usuario a punto de levantarla. Para esas condiciones, se pide dibujar los diagramas de esfuerzo axial, esfuerzo cortante, momento flector, giro de las secciones, y desplazamientos transversales, de la barra de carga. Enjuicie el riesgo de plastificación en algún punto de la barra, y estime su desplazamiento transversal máximo debido a deformación.

A estos efectos, considere que la barra tuviese un apoyo fijo en la sección en la articulación, y un apoyo simple en el punto de contacto con la barra vertical (en el que la reacción será nula).

Puede despreciar el peso propio de la barra de carga y de los agarradores en estos cálculos.

En el cálculo de desplazamientos, pueden realizarse estimaciones geométricas aproximadas sobre los diagramas, o bien realizar un cálculo analítico (o ambas cosas si se desea).

SUPUESTO 8

Retomando las condiciones de los supuestos 2 y 3 (carga de 140kp, sin usuario que actúe), emita un juicio razonado acerca del riesgo de plastificación en la barra vertical de apoyo.

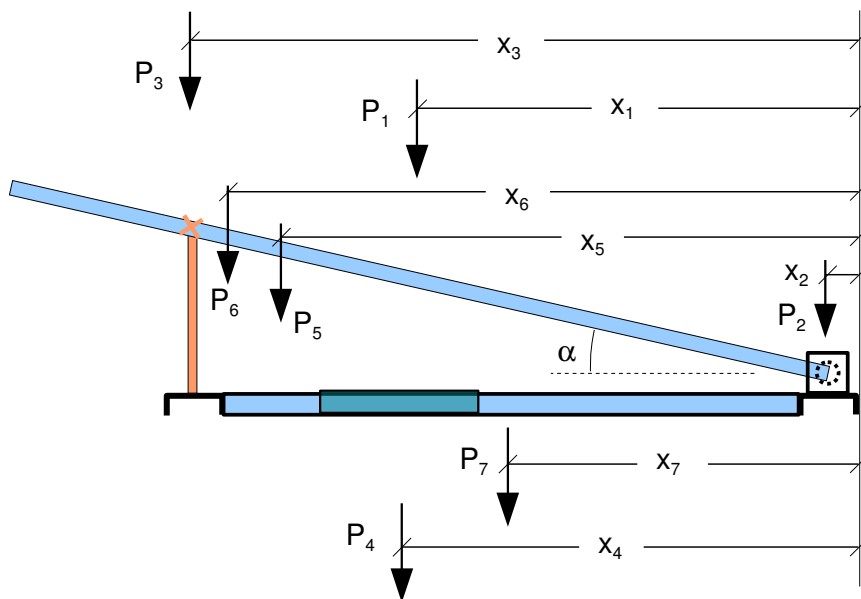
Adicionalmente, justifique mediante algún cálculo rápido que este supuesto será menos exigente para la barra de carga que el supuesto 7 anterior.

Supuesto 1 - solución

ENFOQUE: Por comodidad, vamos a reducir los pesos de los elementos del aparato a una sola fuerza. En esta etapa supondremos tentativamente que el soporte es también de acero.

Seguidamente calcularemos la fuerza F en el extremo de la barra que sería justamente necesaria para hacer volcar el aparato. En el caso de que obtengamos un valor entre 60 y 80 kp, la hipótesis de que el soporte es de acero habrá resultado compatible con el experimento.

Comenzamos pues por calcular todos los pesos y centros de gravedad de los distintos elementos, que llamaremos respectivamente P_i y x_i para cada elemento "i". Mediremos las cotas desde el extremo derecho del aparato, como se indica:



$$\alpha = \arcsen \frac{26,5 - 4}{99,5 + 17 + 4,5} = 10,7^\circ$$

Barra de carga (1):

$$P_1 = \pi (1,4 \text{ cm})^2 (99,5 + 17 + 4,5 + 3,5 + 28) \text{ cm} \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^3} = 7,41 \text{ kp}$$

$$x_1 = \frac{(99,5 + 17 + 4,5 + 3,5 + 28) \text{ cm}}{2} \cos \alpha + 5 = 79,92 \text{ cm}$$

Aparataje (2):

$$P_2 = 0,25 \text{ kp} ; \quad x_2 = 5 \text{ cm}$$

Barra vertical (3):

$$P_3 = 26,5 \text{ cm} \cdot \pi (1 \text{ cm})^2 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^3} = 0,66 \text{ kp}$$

$$x_3 = (99,5 + 17 + 4,5) \cos \alpha + 5 = 123,89 \text{ cm}$$

(x_3 no es exactamente el centro del perfil C)

Peana (4):

$$P_4 = 30(62 + 10)0,4 \text{ cm}^3 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^3} = 6,83 \text{ kp}$$

$$x_4 = 10 + 60 + 30/2 = 85 \text{ cm}$$

Agarradores, parte perpendicular a la barra de carga (5):

$$P_5 = (34,5 - 17) \text{ cm} \cdot \pi(1 \text{ cm})^2 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^3} \times 2 = 0,87 \text{ kp}$$

$$x_5 = 99,5 \cos \alpha + 5 = 102,76 \text{ cm}$$

Agarradores, parte a 45° de la barra de carga (6):

$$P_6 = 17\sqrt{2} \text{ cm} \cdot \pi(1 \text{ cm})^2 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^3} \times 2 = 1,19 \text{ kp}$$

$$x_6 = (99,5 + 17/2) \cos \alpha + 5 = 111,12 \text{ cm}$$

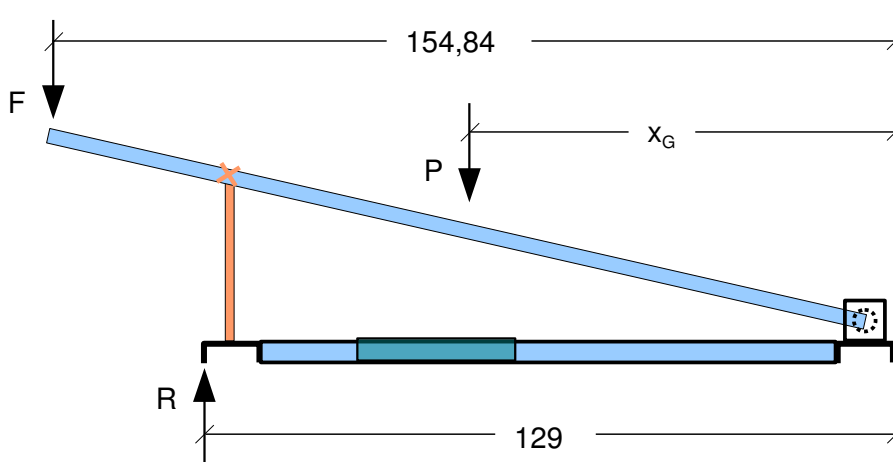
Soporte, supuesto de acero (7):

$$P_7 = 20 \cdot 0,4(60,5 \times 2 + 109) \text{ cm}^3 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^3} = 14,54 \text{ kp}$$

$$x_7 = 129/2 = 64,50 \text{ cm}$$

Por comodidad, y para su uso posterior, resumimos estos resultados:

	P	X	Pi * Xi
barra de carga (1)	7,41	79,92	592,21
aparataje (2)	0,25	5	1,25
barra vertical (3)	0,66	123,89	81,77
peana (4)	6,83	85	580,55
asas mano (5)	0,87	102,76	89,40
asas 45° (6)	1,19	111,12	132,23
soporte (7)	14,54	64,5	937,83
	31,75		2415,24



Podemos reducir el sistema de fuerzas paralelas que son los pesos $P_1...P_7$ a su resultante P colocada en la cota x_G del "centro de gravedad" de los pesos (que es un punto del eje central de ese sistema de vectores). Sus valores son:

$$P = \sum_{i=1}^7 P_i = 31,75 \text{kp} ; \quad x_G = \frac{\sum_{i=1}^7 P_i \cdot x_i}{P} = \frac{2415,24 \text{kp} \cdot \text{cm}}{31,75 \text{kp}} = 76,07 \text{cm}$$

La figura anterior muestra el estado del aparato en la posición de vuelco inminente. En ella, todo el soporte está a punto de levantarse del suelo, salvo su extremo izquierdo, en torno al cual va a girar. Por tanto la única reacción del suelo sobre el soporte será una fuerza concentrada, mostrada como R . Disponemos de dos ecuaciones de la estática del conjunto (suma de fuerzas verticales nula, suma de momentos respecto de un punto nula). Las incógnitas son el valor de R , y el valor de F . Siendo éste último el que nos interesa, podemos calcularlo directamente planteando el equilibrio de momentos respecto del punto de aplicación de R :

$$(154,84 - 129) \cdot F = (129 - 76,07) \cdot 31,75 \Rightarrow F = 65,04 \text{kp}$$

RESPUESTA: El valor calculado de F se encuentra entre 60 y 80 kp, por tanto la hipótesis de que el soporte es de acero es efectivamente compatible con el resultado del experimento.

Nota.- *In situ*, se apreciaba que el conjunto se desestabilizaba pronto en el proceso de añadir la última pesa. Ello es compatible con el hecho de que el valor obtenido (65,04kp) sea más cercano a 60 que a 80kp.

Supuesto 2 - solución

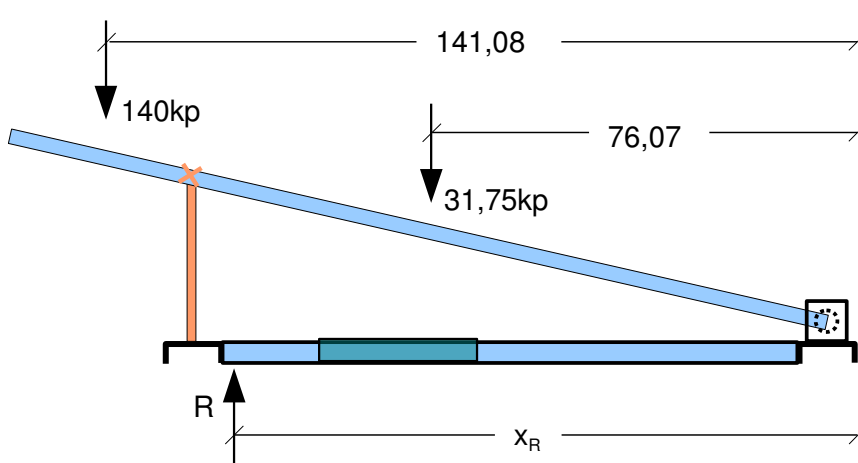
ENFOQUE: Dado que simplemente se trata de dilucidar si el aparato vuelca o no, y dado que si lo hace será girando en torno al extremo izquierdo del soporte, sería correcto tomar momentos respecto de ese punto, y ver qué momento “puede más”: si el del peso del aparato (en cuyo caso la configuración sería estable, propiciado un amplio contacto del soporte con el suelo), o el del peso de la carga (en cuyo caso el aparato volcaría). Aunque este enfoque, basado en “efectos estabilizadores y desestabilizadores”, es frecuentemente mencionado en las normativas, resulta poco claro porque en realidad no plantea el equilibrio de un sólido bajo todas sus acciones.

Se considera más claro y aconsejable pensar en el equilibrio de todas las acciones que actúan, que en este caso serán los 140 kp de carga, actuando en el centro del conjunto de pesas, el peso del aparato, actuando como hemos calculado en el supuesto anterior, y la reacción del suelo sobre el aparato. Esta última constará de un cierto sistema de fuerzas verticales hacia arriba (ya que el contacto con el suelo solamente puede transmitir compresión), probablemente de distribución complicada y un tanto impredecible, pero que en todo caso podremos reducir a su resultante R actuando en una cierta cota x_R . Es evidente que esta cota debe caer en algún punto intermedio de esa distribución de compresiones, por complicada que sea (si hubiese posibilidad de tracciones lo anterior no podría asegurarse). Por tanto, el rango de x_R físicamente posible es el que cae dentro del soporte. Si el valor de x_R obtenido analíticamente a partir del equilibrio del sistema cayese fuera del soporte, habría que interpretar que el equilibrio estático no es posible bajo las acciones dadas. Usaremos lo anterior para predecir el vuelco o no del aparato.

Como indica la figura, podemos reducir los 140 kp de carga a una fuerza que actúa en el centro de las pesas, de posición:

$$x = (99,5 + 17 + 4,5 + 3,5 + 28/2) \cos \alpha + 5 = 141,08 \text{ cm}$$

Se representa la resultante de la acción del suelo actuando en un punto x_R interior a la zona físicamente posible, sin que esta mera representación prejuzgue el resultado (x_R es incógnita).



Para imponer el equilibrio, comenzamos por expresar que la suma de fuerzas, en este caso verticales, sea nula. Ello conduce inmediatamente a que $R=140+31,75=171,75$ kp. A continuación hacemos nulo el momento respecto de un punto. Elegimos el origen de cotas x por comodidad (nótese que el punto respecto del que tomamos momentos para posteriormente imponer su equilibrio, no es, ni tiene porqué ser, la articulación). En definitiva:

$$140 \cdot 141,08 + 31,75 \cdot 76,07 - 171,75 \cdot x_R = 0 \Rightarrow x_R = 129,07 \text{ cm}$$

RESPUESTA: El valor anterior de x_R coincide muy aproximadamente con el extremo del soporte (la diferencia entre 129 y 129,07cm no es significativa). El aparato volcará, o bien quedará muy próximo a volcar bajo esa carga. El que ocurra una cosa u otra dependerá de cualquier pequeña desviación de los datos, o de las hipótesis adoptadas, respecto de la realidad.

Notas finales.-

De hecho, el aparato se mantiene estable. No obstante, una pequeña carga adicional lo desequilibra, de producirse. Ello es compatible con los resultados obtenidos.

Las 7 pesas no ocupan exactamente los 28 cm de la zona de carga, sino algún milímetro menos. Esta pequeña inexactitud tiene un efecto estabilizador que podría explicar por sí sola el comportamiento observado en la práctica.

Otra posible inexactitud que puede influir en idéntico sentido es el valor de la densidad considerado para el acero. Hemos tomado un valor estimado promedio para todas las piezas del aparato, que muy probablemente sea algo inferior al real en algunas de ellas.

Las dimensiones se tomaron con el mayor cuidado que se pudo, pero utilizando un metro flexible dividido en milímetros. Es muy posible que existan errores del orden del mm en las medidas.

Se han despreciado algunos pesos pequeños, como el de los relieves de la peana, los resaltes de las barras, etc. Estos pesos tienen también un efecto estabilizador.

Adicionalmente hay que apreciar que un valor de 0,07cm es del orden de la precisión numérica que hemos usado en los cálculos, por lo que en todo caso no puede considerarse significativo.

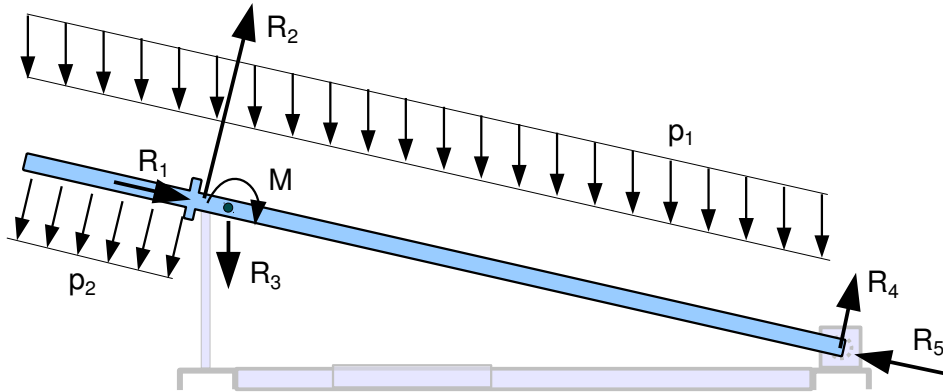
Con cualquier resultado cercano al obtenido, aunque fuese ligeramente menor que 129cm, la prudencia haría desaconsejable llegar a cargar el aparato con la carga máxima considerada (parecería que nadie podría querer hacerlo, pero uno se sorprende...).

Este supuesto ha mostrado, entre otras cosas, que una pequeña variación en un resultado numérico puede implicar el cambio de un "sí" a un "no" en una respuesta, en situaciones particulares. El buen juicio del ingeniero evitará que un resultado numérico ajustado le induzca a aventurar predicciones inciertas, teniendo en cuenta el grado de incertidumbre que exista en los datos de partida.

Supuesto 3 - solución

ENFOQUE: Se trata de plantear lo que suele denominarse como “diagramas de sólido libre” en la literatura. Plantearemos el equilibrio de los elementos requeridos por separado, para calcular las acciones sobre ellos.

Vamos a aislar en primer lugar la barra de carga. Las acciones que actúan sobre la misma se representan en la figura siguiente, y se explican a continuación.



- El peso propio de la barra. Actúa como una fuerza distribuida de dirección vertical (p_1). Su valor, expresado en kp por unidad de longitud de barra (en barras inclinadas es igualmente frecuente expresar la carga por unidad de abscisa horizontal), será:

$$p_1 = \pi(1,4\text{cm})^2 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} \text{kp/cm}^3 = 48,64 \cdot 10^{-3} \text{kp/cm}$$

- El contacto de las pesas sobre la barra. Actúa como una fuerza distribuida que, en ausencia de rozamiento, será perpendicular a la barra (p_2). Su valor es (por unidad de longitud de barra):

$$p_2 = 140\text{kp} \cdot \cos \alpha / 28\text{cm} = 4,91 \text{kp/cm}$$

- El contacto de la primera pesa sobre el resalte que sirve de “tope de la zona de carga”. Actuará como una fuerza concentrada, aproximadamente colineal con la barra (R_1). Su valor debe equivaler al empuje longitudinal de las pesas, para que a su vez éstas estén en equilibrio:

$$R_1 = 140\text{kp} \cdot \sin \alpha = 26,03 \text{kp}$$

- El contacto de la barra vertical de apoyo sobre la barra de carga. Actúa como una fuerza concentrada (R_2), que en ausencia de rozamiento será perpendicular a la barra. Será una de las incógnitas del problema.

- Las acciones transmitidas por el peso de los agarradores a través de sus soldaduras. Éstas serán iguales y contrarias a las necesarias para mantener los agarradores aislados en equilibrio, es decir: una fuerza vertical igual al peso de los agarradores (R_3), y un momento perpendicular a la barra de carga (M). El peso de los agarradores ya fue calculado anteriormente:

$$R_3 = 0,87 + 1,19 = 2,06 \text{kp}$$

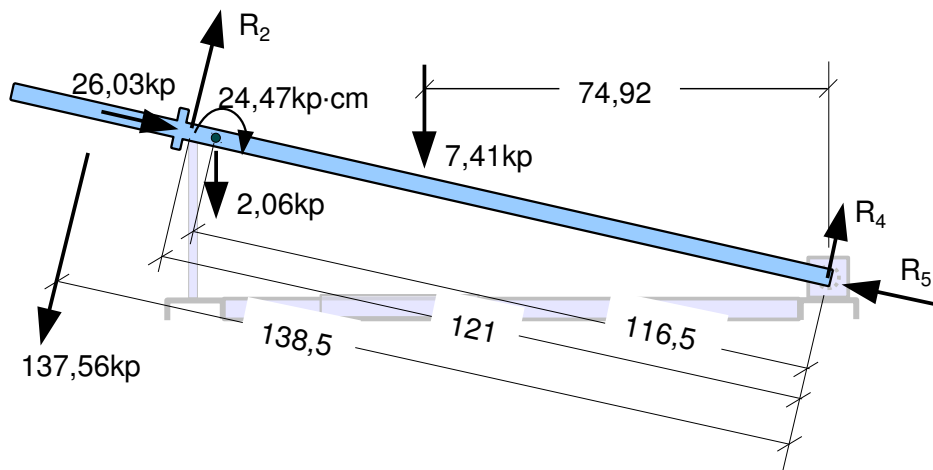
El momento se calcula como suma de las aportaciones de los segmentos a 45° y de los segmentos perpendiculares a la barra:

$$M = 1,19 \text{kp} \cdot \frac{17 \text{cm}}{2} \cos \alpha + 0,87 \text{kp} \cdot 17 \text{cm} \cdot \cos \alpha = 24,47 \text{kp} \cdot \text{cm}$$

Nota: cada agarrador por separado aportaría además una componente de momento longitudinal según el aparato, pero las de ambos agarradores tienen sentidos opuestos y actúan (sensiblemente) en el mismo punto de la barra de carga, por lo que se cancelan en lo que respecta a dicha barra de carga.

- Las acciones de la articulación sobre la barra de carga. En ausencia de rozamiento, serán dos componentes de fuerza concentrada. Por ejemplo, una fuerza perpendicular a la barra (R_4), y otra colineal con ella (R_5), como muestra la figura. Sus valores son incógnitas a calcular.

Quedan por conocer R_2 , R_4 , R_5 . Para su cálculo disponemos de las tres ecuaciones de equilibrio de la barra de carga en el plano. Podemos comenzar tomando momentos respecto de la articulación, para conseguir una ecuación en la que solamente aparezca R_2 como incógnita. A estos efectos no hay inconveniente en usar reducciones cómodas de las distribuciones de carga, como las que se han empleado en la figura siguiente:



$$137,56 \cdot 138,5 - R_2 \cdot 121 + 2,06 \cdot \cos \alpha \cdot 116,5 - 24,47 + 7,41 \cdot 74,92 = 0 \Rightarrow R_2 = 163,79 \text{kp}$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas perpendiculares a la barra tendrá ahora una sola incógnita:

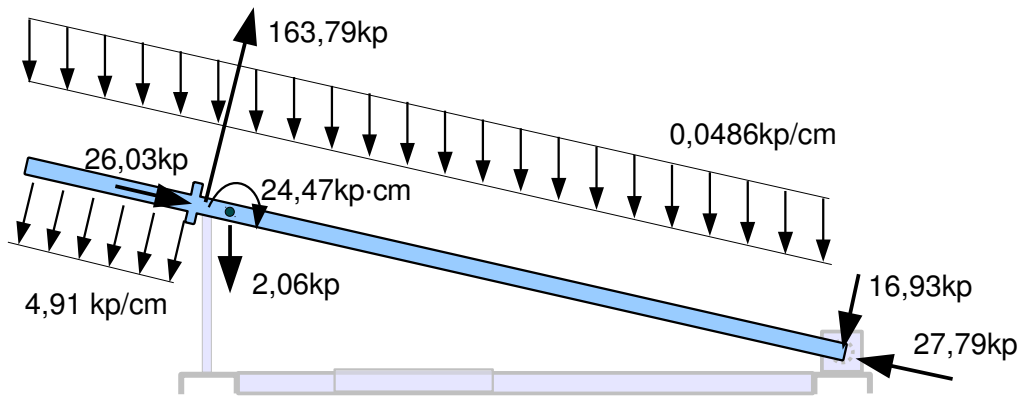
$$R_4 + 163,79 = 137,56 + 7,41 \cdot \cos \alpha + 2,06 \cdot \cos \alpha \Rightarrow R_4 = -16,93 \text{kp}$$

El valor negativo obtenido indica que R_4 tiene sentido contrario al supuesto en la figura.

Finalmente, la ecuación de equilibrio de fuerzas paralelas a la barra permite calcular R_5 :

$$R_5 = 26,03 + 2,06 \cdot \sin \alpha + 7,41 \cdot \sin \alpha = 27,79 \text{kp}$$

La figura siguiente resume nuestra respuesta en cuanto a la barra de carga:



Nos ocupamos ahora de la barra vertical. Ya que no hemos despreciado otros efectos igualmente menores, tampoco despreciaremos su peso propio en este caso.

Sobre esta barra actuará una fuerza igual y contraria a la que ella ejercía sobre la barra de carga (de 163,79kp), el peso propio, y las acciones desconocidas que el soporte transmite a esta barra en su extremo inferior a través de la soldadura. Dicha unión es capaz de transmitir dos componentes de fuerza (R_6 y R_7 en la figura), y un momento (M_1). Disponemos de las tres ecuaciones de equilibrio estático de la barra en el plano para calcular estas incógnitas.

Comenzamos imponiendo el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$R_6 = 163,79 \cdot \sin \alpha = 30,46 \text{ kp}$$

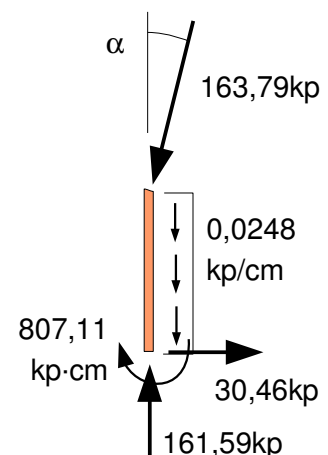
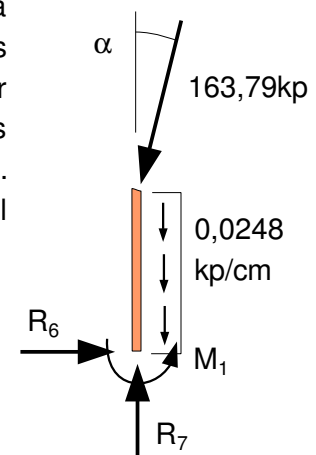
Del equilibrio de fuerzas verticales resulta:

$$R_7 = 163,79 \cdot \cos \alpha + 0,0248 \cdot 26,5 = 161,59 \text{ kp}$$

Finalmente, expresamos el equilibrio de momentos respecto del punto inferior de la barra:

$$M_1 + 163,79 \cdot \sin \alpha \cdot 26,5 = 0 \Rightarrow M_1 = -807,11 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

El valor negativo anterior indica que el momento es de sentido contrario al supuesto inicialmente en la figura (en casos evidentes como éste, es recomendable poner algún cuidado en “acertar” a la primera). Por tanto, las acciones sobre esta barra que se piden, son las indicadas en la figura siguiente:



RESPUESTA: Las acciones pedidas son las indicadas en la figuras respectivas.

Supuesto 4 - solución

ENFOQUE: Equilibraremos el conjunto del aparato bajo las acciones que actúan sobre él. La acción del suelo será representada por su resultante, la cual se pide. Comenzamos por apreciar que el enunciado tiene una pequeña inconsistencia respecto de las hipótesis de supuestos anteriores, ya que si el contacto con el suelo se produce sin rozamiento, el equilibrio es imposible (F tiene componente horizontal). Para poder comenzar a operar, debemos asumir pues que el contacto con el suelo se produce con el rozamiento necesario para equilibrar las fuerzas horizontales. La resultante de la reacción del suelo tendrá por tanto dos componentes, que llamaremos R y F_R .

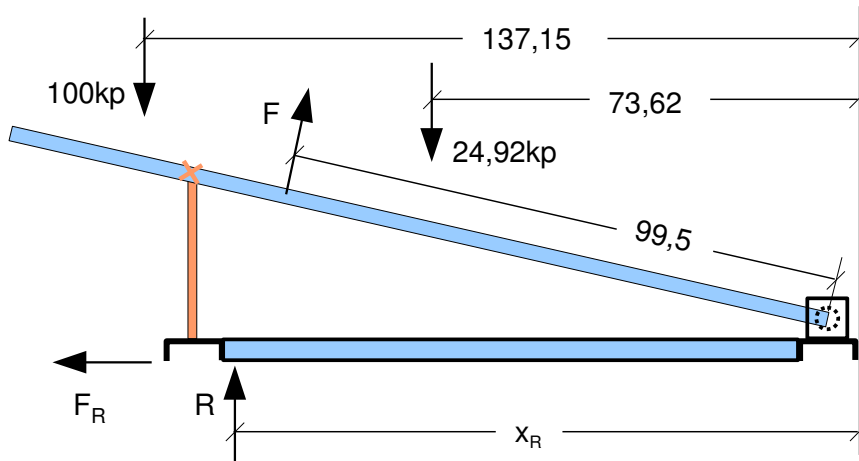
Comenzamos por calcular la fuerzas conocidas y su posición. La resultante de las pesas vale 100kp y estará situada a una cota de:

$$(99,5 + 17 + 4,5 + 3,5 + 20/2) \cdot \cos \alpha + 5 = 137,15 \text{ cm}$$

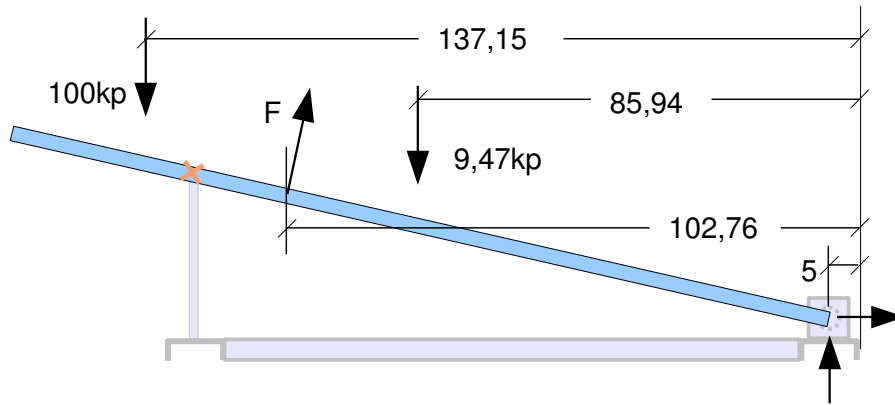
La resultante de los elementos del aparato (sin la peana, elemento número 4 según la numeración que venimos empleando), vale $7,41 + 0,25 + 0,66 + 0,87 + 1,19 + 14,54 = 24,92 \text{ kp}$, y está situada a una cota de

$$\frac{\sum_{i=1, \neq 4}^7 x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1, \neq 4}^7 P_i} = \frac{7,41 \cdot 79,92 + 0,25 \cdot 5 + 0,66 \cdot 123,89 + 0,87 \cdot 102,76 + 1,19 \cdot 111,12 + 14,54 \cdot 64,5}{7,41 + 0,25 + 0,66 + 0,87 + 1,19 + 14,54} = 73,62 \text{ cm}$$

Los datos calculados se muestran en la figura siguiente, junto con los aún desconocidos:



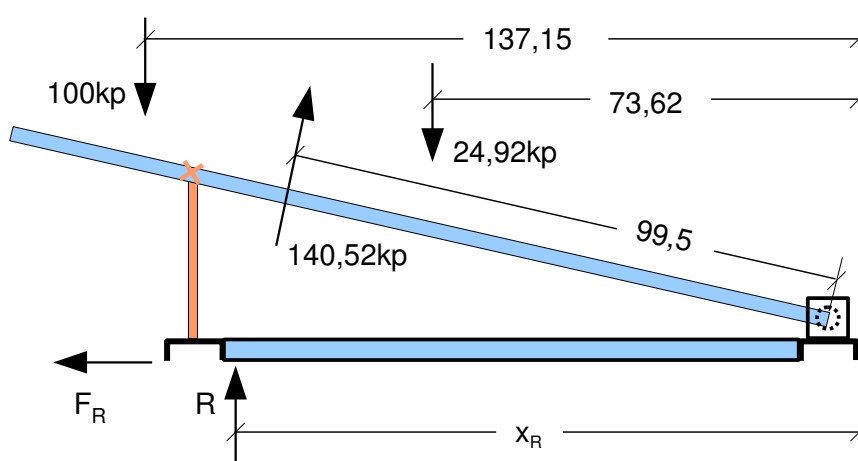
La fuerza F ejercida por el usuario debe cumplir la condición de que la barra de carga con sus pesas esté a punto de levantarse. Para ello, el conjunto de las pesas y la barra de carga debe estar en equilibrio con acción nula sobre esta última de la barra vertical. Por tanto, el cálculo de F requiere que consideremos aisladamente la barra de carga junto con sus pesas, lo que hacemos en la figura siguiente. En ella, el peso de la barra de carga y los agarradores se ha reducido a una única fuerza de valor $7,41 + 0,87 + 1,19 = 9,47 \text{ kp}$ situada a una cota de 85,94 cm (no se detalla este cálculo, que sigue el patrón habitual).



Tomaremos momentos respecto de la articulación, para que no intervengan las dos incógnitas de reacción que la misma puede producir. Este equilibrio de momentos se expresa como

$$100 \cdot (137,15 - 5) + 9,47 \cdot (85,94 - 5) = F \cdot 99,5 \Rightarrow F = 140,52 \text{ kp}$$

Como curiosidad, nótese que el usuario realiza una fuerza bastante mayor que el peso de la carga. Conocido el valor de F , volvemos a considerar el equilibrio del conjunto mostrado anteriormente, que se reproduce por comodidad:



Tenemos tres incógnitas, que son R , F_R , x_R . Disponemos de las tres ecuaciones de la estática del conjunto para calcularlas. El equilibrio de fuerzas verticales produce

$$140,52 \cdot \cos \alpha + R = 100 + 24,92 \Rightarrow R = -13,15 \text{ kp}$$

El valor negativo obtenido indica que R tiene sentido opuesto al considerado en la figura, ... pero... el contacto entre el suelo y el soporte ¡ no puede aportar una fuerza de ese tipo !

RESPUESTA: Se concluye que el equilibrio no es posible bajo las condiciones dadas. No tendría sentido realizar más cálculos estáticos al respecto. Si un usuario intentase realizar el ejercicio en dichas condiciones, el soporte se movería al intentar levantar la carga.

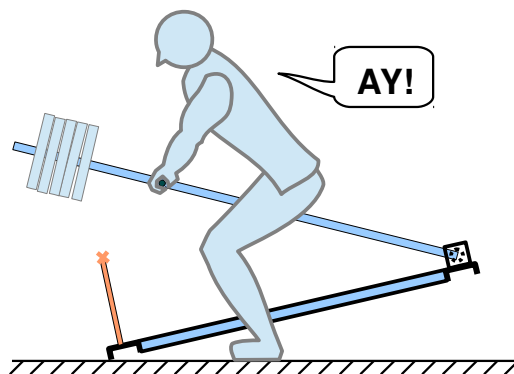
Notas finales:

- Lo anterior ha mostrado que la peana es una parte fundamental del aparato. Cuando la misma está presente, es pisada por el usuario, aplicando una gran fuerza hacia abajo al soporte (que

podría ser del orden del peso del usuario más la componente vertical de la fuerza que los agarradores ejercen sobre él). Esto impide el movimiento indeseado del soporte.

- Los cálculos realizados en primer lugar sobre la barra de carga aislada (que predecían una fuerza del usuario de 140,52kp, etc), asumían el equilibrio estático del conjunto. Como éste no se produce, dichos cálculos carecen en realidad de validez para este caso.

- No es preciso, ni especialmente interesante, que nos esforcemos en adivinar cómo se produciría el movimiento referido, ya que en todo caso lo que nos importaría sería evitar que se produjese. No obstante, partiendo del reposo, el que al conjunto se le apliquen fuerzas cuya resultante vertical hacia arriba no es nula indica que el mismo se movería hacia arriba (como tendencia general), sin excluir que puedan ocurrir a la vez otros movimientos horizontales, giros, etc. Sin pretender realizar un análisis riguroso del comportamiento "post-disfunción", la topología del aparato es compatible con que, por ejemplo, el soporte quedase colgando de la articulación en una configuración similar a la mostrada en la figura.



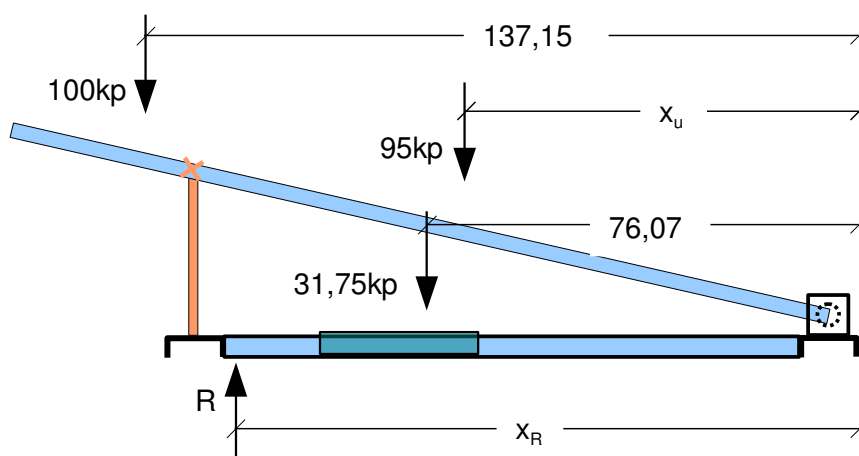
Supuesto 5 - solución

ENFOQUE: Ahora existen garantías de que el soporte se mantendrá estable. En estas condiciones, la fuerza que debe ejercer el usuario sobre la barra de carga (a través de los agarradores, etc), depende solamente del equilibrio de dicha barra más sus accesorios. Los cálculos al efecto fueron realizados en el Supuesto anterior asumiendo esa estabilidad. Entonces no tenían validez, pero ahora sí la tienen. Por tanto, la primera respuesta está ya calculada.

En cuanto a la segunda pregunta, y atendiendo a que se pregunta la resultante de las acciones del suelo sobre el APARATO (no separadamente sobre el soporte o sobre la peana), es indiferente si la peana actúa de una u otra de las dos formas descritas, o cualquiera otra intermedia. Lo anterior se hace evidente aislando el conjunto usuario+aparato (peana incluida), donde las acciones del usuario sobre el aparato tienen su correspondiente reacción, siendo fuerzas internas del sistema que no intervienen en su equilibrio global.

En el supuesto anterior ya hemos aislado el conjunto pesas + barra de carga + agarradores, y hemos calculado la fuerza F que el usuario debe ejercer para que la acción del apoyo proporcionado por la barra vertical sea nula. Obtuvimos $F=140,52$ kp, actuando perpendicularmente a la barra de carga. La primera pregunta queda respondida con ello.

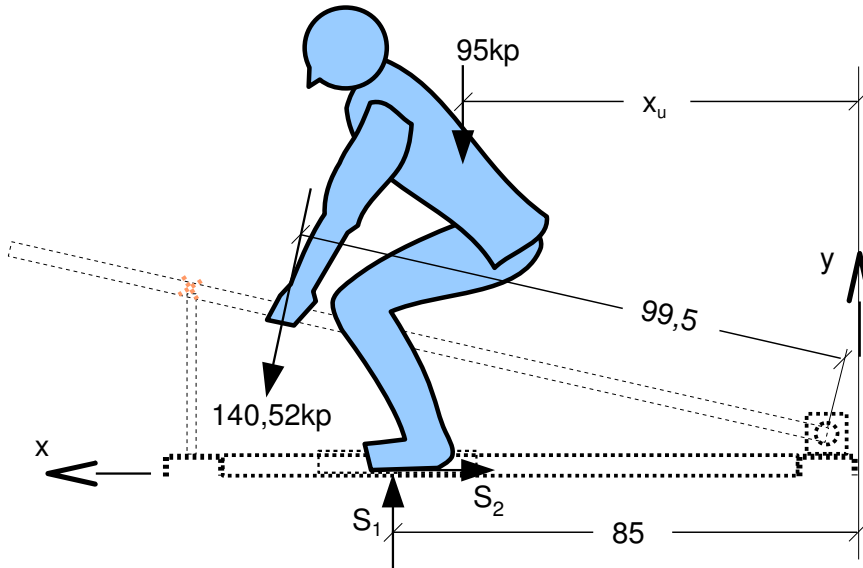
En cuanto a la segunda pregunta, lo que ha cambiado básicamente respecto del supuesto anterior es que el usuario actúa ahora en dos lugares sobre el aparato (en los agarradores y en la peana), no interactuando con ningún otro elemento (como el suelo). Por tanto, las acciones que el usuario ejerza sobre el aparato tendrán su correspondiente reacción por parte del mismo, quedando como fuerzas internas del sistema, que no intervienen en el equilibrio global. En resumen, podemos plantear el equilibrio global del sistema usuario+aparato, según la figura siguiente.



Se han indicado las fuerzas que actúan, todas ellas reducidas a su resultante, cuales son: el peso de los elementos del aparato (31,75kp), el peso de las pesas (100kp), el peso del usuario (95kp), y la reacción vertical del suelo R . Nótese que la resultante de las fuerzas de rozamiento del suelo debe ser nula, ya que no existe ninguna otra acción horizontal sobre el sistema. Las tres incógnitas

a calcular son la fuerza de reacción R, su posición x_R , y la posición del centro de gravedad del usuario, x_u . Para ello contamos con... mmm..., ¡vaya! NO contamos con las tres ecuaciones de la estática del conjunto, porque ya hemos empleado una de ellas en “calcular” la componente horizontal de reacción del suelo (la debida al rozamiento). Necesitamos otra ecuación para poder dar una respuesta única al problema.

Como ya es habitual, buscamos más ecuaciones planteando el equilibrio de “algo”. En este caso, el usuario debe estar él mismo en equilibrio, lo que nos va a condicionar el valor de x_u . La figura siguiente muestra al usuario aislado, con sus acciones.

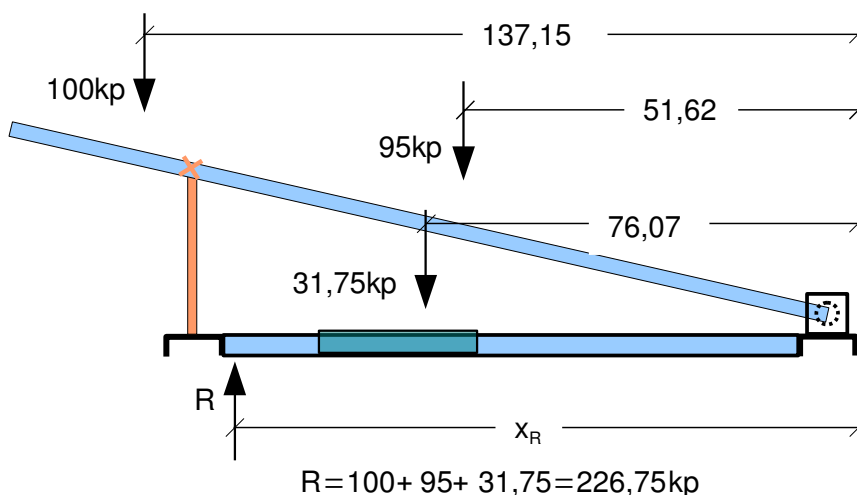


Dado que nos interesa calcular x_u , lo mejor será tomar momentos respecto del punto de aplicación de la reacción de la peana sobre los pies (componentes S_1 , S_2 , en la figura). Tendremos:

$$140,52 \text{kp} \cdot \cos \alpha \cdot (99,5 \cos \alpha + 5 - 85) + 140,52 \text{kp} \cdot \sin \alpha \cdot (99,5 \sin \alpha + 4 + 5) = 95 \text{kp} \cdot (85 - x_u)$$

$$\Rightarrow x_u = 51,62 \text{cm}$$

Vemos que este valor calculado es practicable, implicando una posición del C.G. del usuario unos 33cm por detrás de los pies. Con ello el problema tiene solución única:



Y tomando momentos respecto del extremo derecho:

$$x_R \cdot 226,75 = 137,15 \cdot 100 + 51,62 \cdot 95 + 76,07 \cdot 31,75 \Rightarrow x_R = 92,68 \text{cm}$$

RESPUESTA: En el instante en que está a punto de levantar la barra cargada, el usuario ejerce una fuerza de 140,52kp sobre los agarradores. La reacción del suelo sobre el aparato, que se puede producir tanto en la peana como en el soporte en proporciones indeterminadas, vale 226,75kp, es vertical, y se sitúa a 92,68 cm del extremo derecho. Ello es independiente de que la peana transmita carga solamente al soporte, o de que transmita parte de carga al soporte y parte directamente al suelo.

Notas:

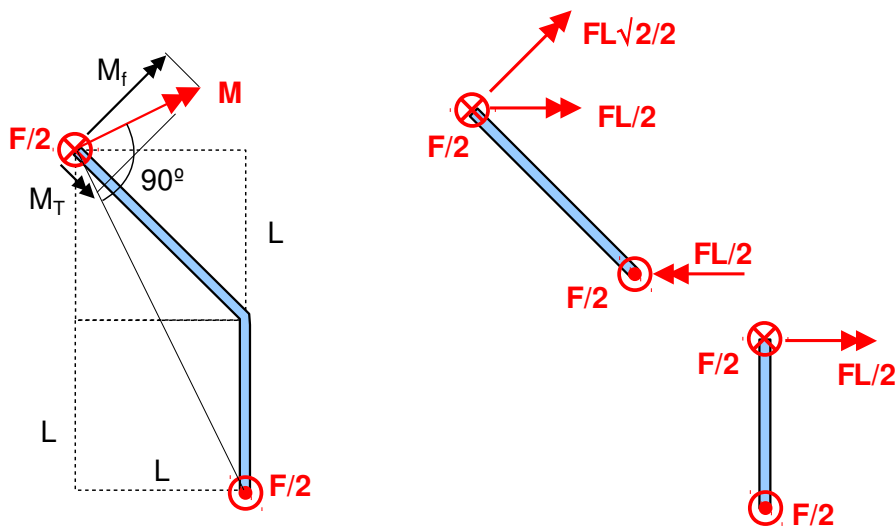
- A efectos de resistencia de los elementos, lo que no se contempla en este supuesto, serían relevantes algunos detalles que a efectos de equilibrio no lo son. Tal es el caso de si la mencionada transmisión de fuerzas de la peana se realizase completamente al soporte, o bien parcialmente al suelo (afectaría fundamentalmente al cálculo del soporte). Y por supuesto, a efectos de resistencia no podríamos usar las reducciones de fuerzas que venimos empleando.
- No hemos necesitado usar parte de la información aportada en el enunciado. En efecto, la respuesta a las preguntas que nos hacen es independiente de cómo la peana transmita sus acciones (lo que ya se ha discutido), y por tanto del dato de que el contacto peana-soporte transmita una acción uniformemente distribuida a lo largo de los 30 cm en que ocurre.
- Al considerar al usuario aisladamente, hemos evitado calcular las acciones de la peana sobre sus pies, ya que no las necesitábamos (a efectos del equilibrio del conjunto, son fuerzas internas). Sin embargo podría ser interesante calcularlas, para juzgar si el coeficiente de rozamiento entre los pies del usuario y la superficie de la peana es de un valor suficiente como para proporcionar la fuerza tangencial requerida. Dicho cálculo no es complicado, y puede realizarse como ejercicio adicional.

Supuesto 6 - solución

ENFOQUE: Al considerar el equilibrio del agarrador, se aprecia de inmediato que en el empotramiento (conexión con la barra de carga), debe existir un momento que no es perpendicular a la barra del agarrador. Por lo tanto, se trata de un problema con torsión y flexión.

La torsión solamente ocurre en el tramo contiguo a la barra de carga, siendo el momento torsor constante a lo largo de ella. La flexión ocurre en ambos tramos. El momento flector es mayor cuanto más nos acercamos a la barra de carga. Por tanto la sección más crítica será la contigua a la barra de carga, y será la que analicemos.

Comenzaremos por ilustrar que las afirmaciones preliminares del enfoque anterior son correctas. La figura de la izquierda muestra el agarrador en su plano. Para que esté en equilibrio, debe haber en la sección contigua a la barra de carga ("sección del empotramiento" en lo sucesivo) una fuerza $F/2$ que entra en el dibujo, para equilibrar la fuerza $F/2$ aplicada por el usuario, la cual sale del dibujo. Entre ambas forman un par de fuerzas, cuyo momento debe ser equilibrado por un momento M en el empotramiento. Como se aprecia, este momento no es perpendicular al tramo de barra del empotramiento, sino que tiene una componente perpendicular M_f que será un momento flector, y una componente M_T colineal con la barra, que será un momento torsor (al menos en ese tramo de la barra).



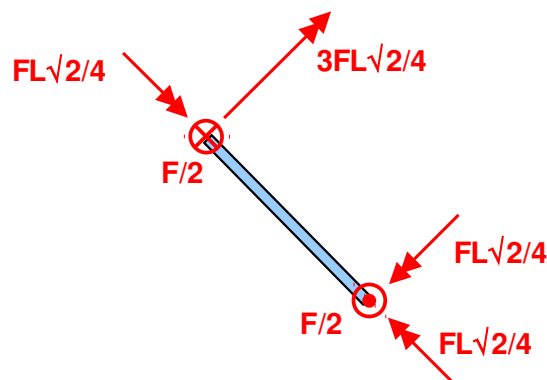
Aunque podríamos hacer los cálculos necesarios (calcular M , etc.) sobre esa primera figura, se ha considerado más ilustrativo equilibrar cada tramo por separado como muestra la segunda figura.

El tramo inferior tiene aplicada la fuerza $F/2$ que le transmite el usuario, lo que conlleva que en el otro extremo (único sitio donde el sólido considerado tiene conexión con el entorno) deba haber una fuerza contraria, y un momento que equilibre el del par de fuerzas formado. Dicho momento, de valor $FL/2$, es perpendicular a la barra, por lo que implica solamente flexión para esa barra.

El tramo superior ("el del empotramiento") tendrá en su conexión con el tramo inferior acciones iguales y opuestas a las anteriores, como se han dibujado. En el extremo del empotramiento debe

existir una fuerza $F/2$ “que entre” para equilibrar a la de la conexión con la otra barra, que salía del dibujo. En cuanto al momento en el empotramiento, podemos razonar que debe equilibrar tanto al momento $FL/2$ que actúa en la conexión con el otro tramo, como al momento del par de fuerzas de módulo $F/2$ que actúan en los extremos de este tramo. Uno de esos dos momentos que actúan en el empotramiento es horizontal y vale $FL/2$, y el otro está a 45° de la horizontal, y vale $FL\sqrt{2}/2$ como se indica. La composición vectorial de estos dos momentos sería el momento M que dibujábamos en la figura de la izquierda.

Nos interesa descomponer los momentos (eventualmente también las fuerzas) en sus componentes perpendicular a la barra, y colineal con la barra. La figura siguiente muestra el tramo de barra contiguo al empotramiento, con las acciones descompuestas según lo anterior. Se aprecia que en este tramo existe un momento torsor constante, de valor $FL\sqrt{2}/4$, y un momento flector variable a lo largo de la barra, que tiene su valor máximo de $3FL\sqrt{2}/4$, en la sección del empotramiento.



Dado que en este tramo existe torsión y flexión, y que en el otro tramo solo existe flexión, y de valor menor ($3FL\sqrt{2}/4 = 1,06 FL > 0,5 FL$), es claro que la sección más solicitada estará en este tramo, y será la sección del empotramiento. Realizamos seguidamente los cálculos de resistencia para esta sección.

Interesan el momento polar de inercia J , y el momento de inercia de la sección respecto de un diámetro, I_z :

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi (1\text{cm})^4}{2} = 1,571 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (1\text{cm})^4}{4} = 0,785 \text{ cm}^4$$

La máxima tensión normal debida a flexión ocurre en el punto superior e inferior del perfil, y vale:

$$\sigma_{xx}^{\text{flex}} = \frac{M_f}{I_z} R = \frac{3 \cdot 200\text{kp} \cdot 17\text{cm} \sqrt{2}/4}{0,785 \text{ cm}^4} 1 \text{ cm} = 4593 \text{ kp/cm}^2$$

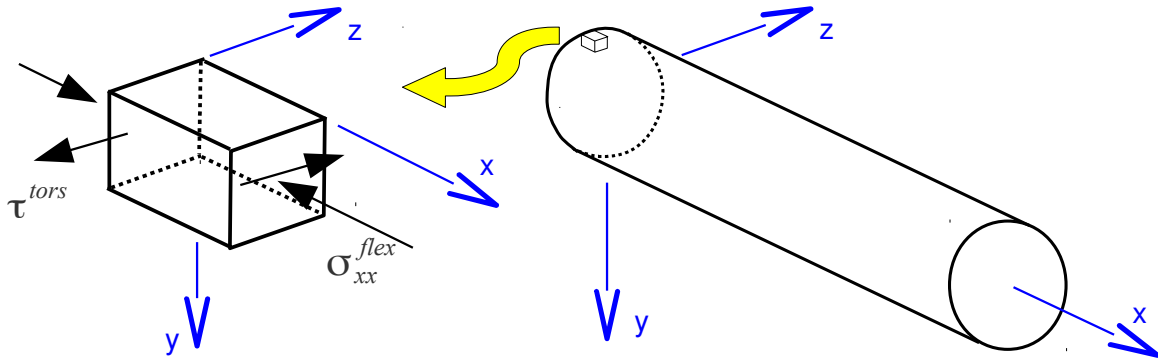
La máxima tensión tangencial debida a flexión ocurre en el centro del perfil, y vale:

$$\sigma_{xy}^{\text{flex}} \approx 1,33 \frac{F/2}{A} = \frac{1,33 \cdot 100\text{kp}}{\pi (1\text{cm})^2} = 42 \text{ kp/cm}^2$$

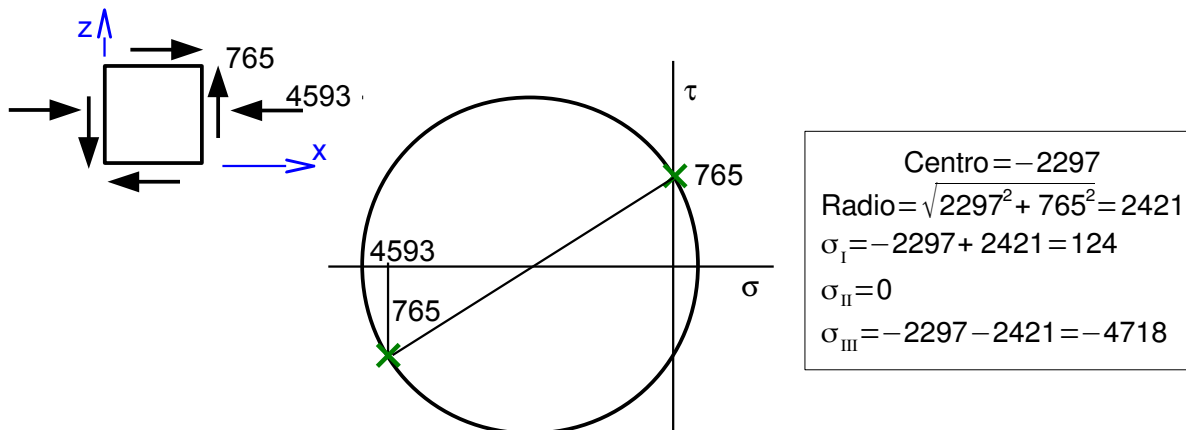
La máxima tensión tangencial debida a torsión ocurre en la periferia del perfil, y vale:

$$\tau^{\text{tors}} = \frac{M_T}{J} \cdot R = \frac{200\text{kp} \cdot 17 \text{ cm} \sqrt{2}/4}{1,571 \text{ cm}^4} (1 \text{ cm}) = 765 \text{ kp/cm}^2$$

Vemos que las tensiones tangenciales debidas a flexión son muy pequeñas, y además su máximo ocurre en el centro del perfil, donde las otras componentes de tensión son nulas. A la vista de lo anterior elegimos como punto más crítico el punto superior (o el inferior, indistintamente) de la sección en el empotramiento, puntos en los que la tensión normal debida a flexión es máxima. La figura siguiente muestra las componentes de tensión existentes en el punto considerado (nótese que la tensión tangencial debida a flexión es nula en ese punto).



Mirando el elemento diferencial desde arriba (desde la zona negativa del eje "y"), trazamos el diagrama de Mohr correspondiente, como indica la figura siguiente. Nótese que la componente de tensión σ_{yy} es principal y vale cero.



Por tanto, la tensión tangencial máxima vale $\tau^{\max} = 2421 \text{ kp/cm}^2$. La tensión equivalente de von Mises se calcula fácilmente como:

$$\left[\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(124)^2 + (124 - (-4718))^2 + (-4718)^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = 4781 \text{ kp/cm}^2$$

RESPUESTA: Bajo las condiciones dadas, el punto más solicitado de los agarradores es el superior (o inferior) de la sección contigua a la barra de carga, que hemos llamado sección del "empotramiento" en la resolución. El valor de la tensión tangencial máxima en ese punto es 2421 kp/cm^2 . El valor de la tensión equivalente de von Mises en ese punto es 4781 kp/cm^2 . Ello implica que para que no hubiese plastificación en ese punto, según el criterio de Tresca sería necesario un acero de límite elástico $\sigma_e = 2 * 2421 = 4842 \text{ kp/cm}^2$, y según el criterio de von Mises sería necesario un acero de límite elástico $\sigma_e = 4781 \text{ kp/cm}^2$. Se aprecia que el criterio de Tresca resulta más exigente, como ocurre en general.

Lo anterior supondría una exigencia demasiado elevada para un acero de construcción, cuyo límite elástico puede llegar a ser sólo de unos 4500 kp/cm². Pero cabe intuir que el material no es un acero de construcción, sino como mínimo un acero de baja aleación (que tienen mejor calidad y límite elástico mayor). Los indicios que sustentan la suposición anterior son, por una parte que el material no se oxida con el uso continuado y el contacto con las manos que ello implica, y por otra parte que el enunciado inicial del problema nos propone asumir una densidad de 7900 kg/m³, ligeramente superior a la del acero dulce convencional (los aceros aleados tienen en general densidad mayor que los no aleados).

En resumen, y a falta de información concreta acerca de la calidad del acero, cabe decir que si bien probablemente no ocurrirá plastificación del material en ningún punto del agarrador, la sollicitación en el mismo es elevada, de una magnitud posiblemente no muy lejana al del posible límite elástico del material.

Notas.-

Otro hecho que habla en favor de que el punto considerado no plastificaría en las condiciones reales de servicio, es que se ha supuesto que la carga de 100kp aplicada por el usuario actúa a solamente 0,5cm del extremo del agarrador (compruébense las medidas). En la práctica eso supondría que el usuario aplicase la fuerza fundamentalmente con los dedos meñiques. Se trata evidentemente de una hipótesis inverosímil. En condiciones reales el usuario aplicará la carga en un punto más interior del agarrador, lo que producirá esfuerzos menores.

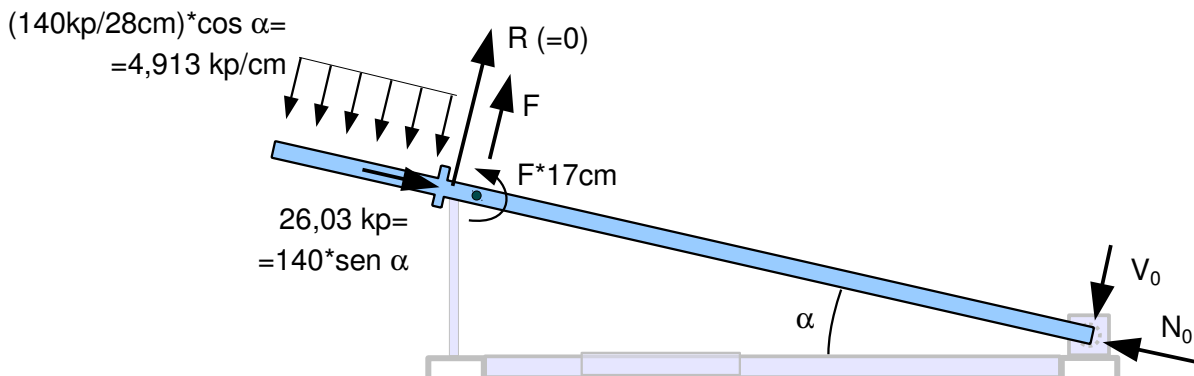
En ningún momento hemos hablado de la soldadura, cuyo cálculo resistente cae fuera del ámbito de este curso. Solamente hemos hablado de la resistencia de las barras, que es lo pretendido. No obstante, y a título informativo, cabe suponer que la soldadura esté ejecutada de forma adecuada, garantizando (entre otros factores) el aporte de material suficiente para lograr lo que se conoce como "soldadura con penetración completa", o bien una soldadura con penetración parcial equivalente. En ese caso, la unión debiera ser en principio segura mientras lo sean las barras que une.

Supuesto 7 - solución

ENFOQUE: Usaremos la condición de que la reacción aportada por la barra de soporte vertical sea nula, para calcular la fuerza ejercida por el usuario en el instante en que la barra de carga se va a levantar. Un cálculo similar fue realizado en el supuesto 5 bajo hipótesis ligeramente diferentes, y es preciso reproducirlo aquí (despreciando los pesos de las barras).

Calculadas todas las acciones sobre la barra de carga, consideraremos sus componentes perpendiculares a la barra y colineales con la misma, y procederemos a trazar los diagramas. Se dará la particularidad de que un apoyo no tendrá reacción, aunque se mantiene el hecho de que su desplazamiento es nulo a efectos de cálculo de desplazamientos.

La figura muestra la barra de carga con las acciones que actúan en este supuesto.



Para $R=0$, son inicialmente desconocidas la fuerza F que ejerce el usuario, y las reacciones V_0 , N_0 , en la articulación. Se calculan a continuación imponiendo el equilibrio de la barra. Comenzamos tomando momentos respecto de la articulación:

$$140 \cos \alpha \cdot (99,5 + 17 + 4,5 + 3,5 + 28/2) + 17F - F(99,5 + 17) = 0$$

$$\Rightarrow F = 191,48 \text{ kp}$$

El equilibrio de fuerzas en la dirección de la barra implica inmediatamente:

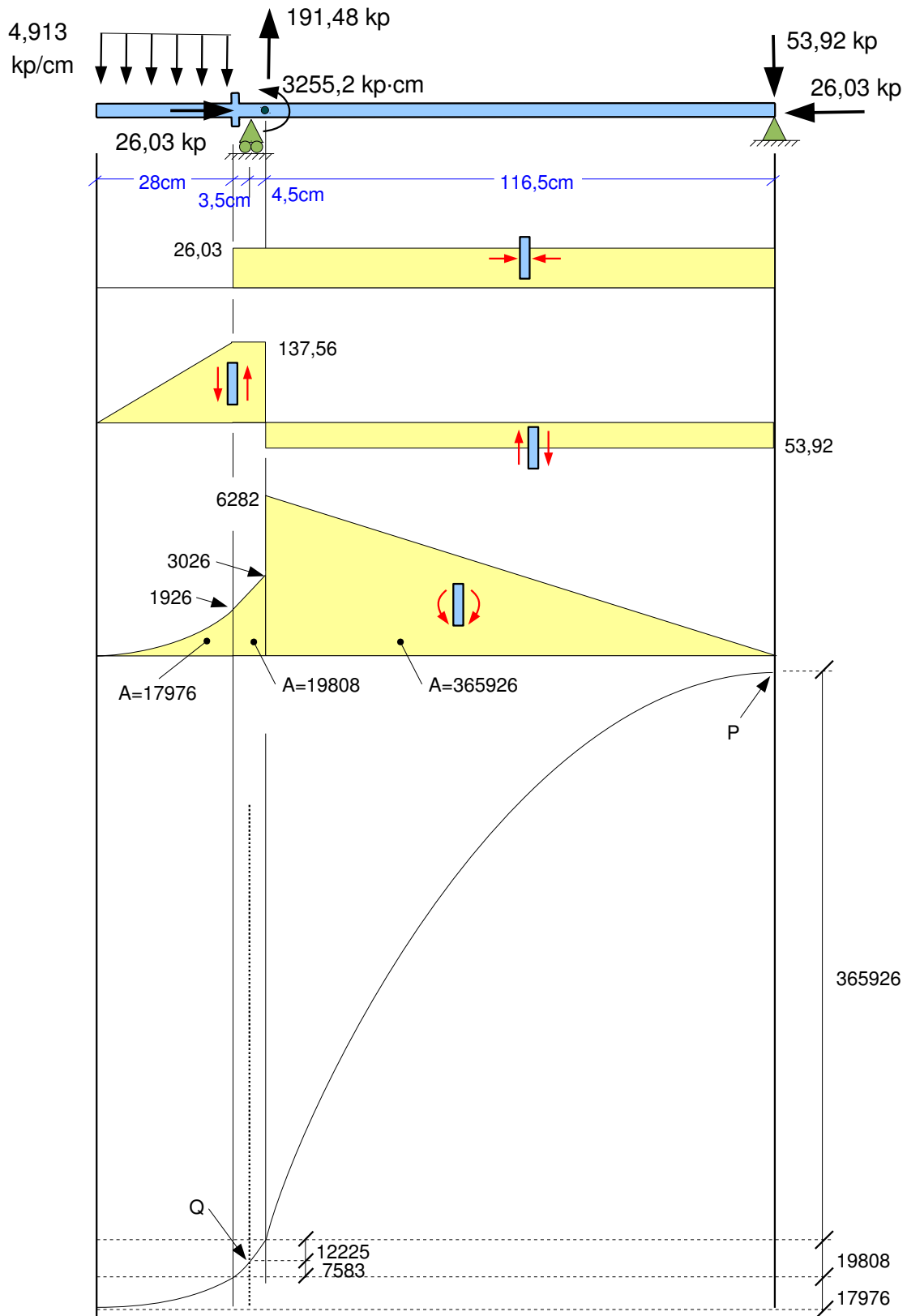
$$N_0 = 26,03 \text{ kp}$$

Y el equilibrio de fuerzas perpendiculares a la barra:

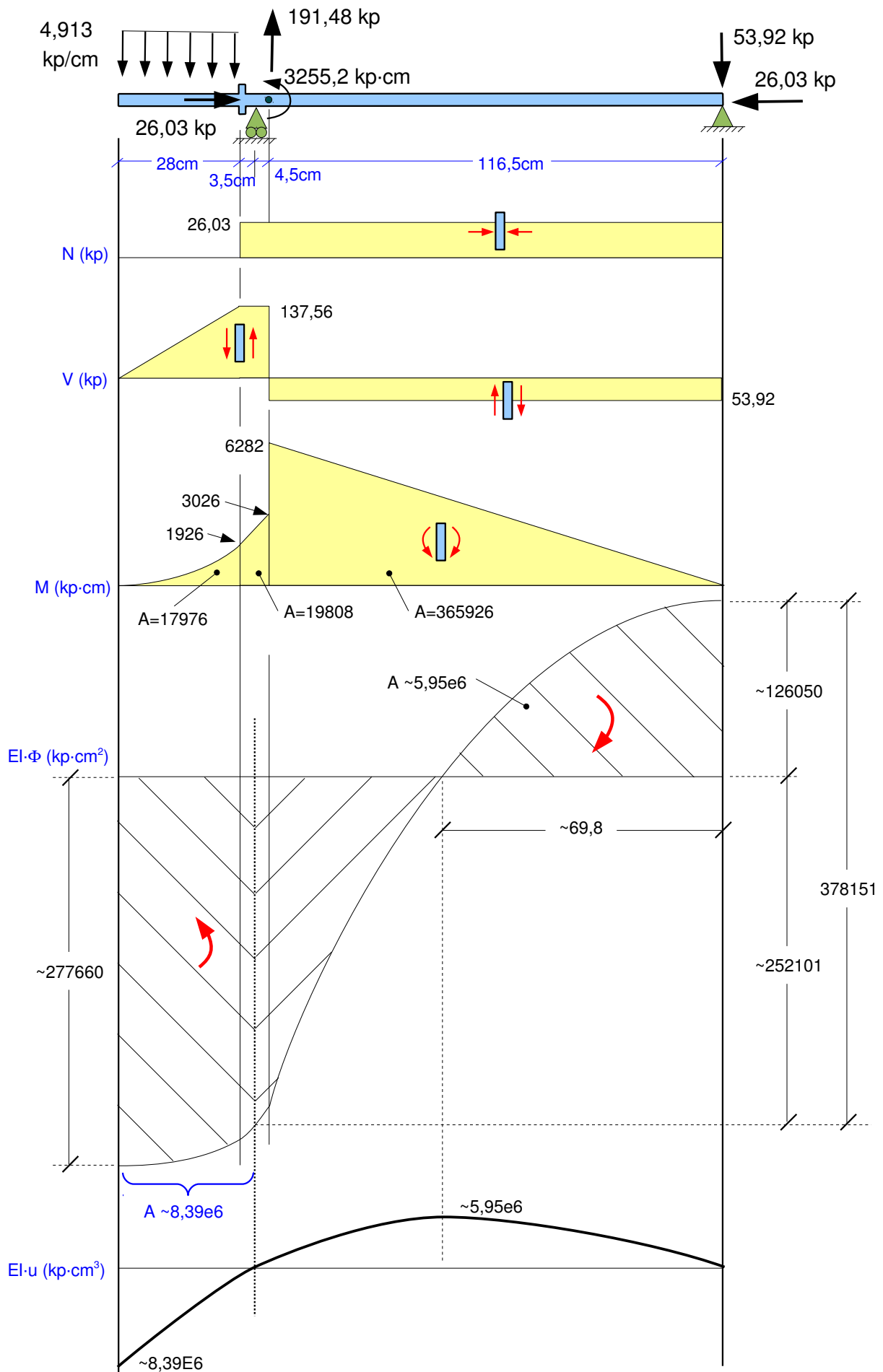
$$V_0 = F - 140 \cos \alpha = 53,92 \text{ kp}$$

Nótese que a efectos de aplicación del equilibrio se ha utilizado una reducción del sistema de carga distribuida correspondiente a las pesas. Ello no se ha indicado en la figura.

Conocidas las acciones sobre la barra, podemos proceder al trazado de los diagramas. Se ha cuidado de plantear las incógnitas de forma que las mismas sean acciones perpendiculares o paralelas a la barra, lo que será ventajoso en lo que sigue. Se dibuja la barra girada un ángulo α por comodidad:



Se ha trazado el diagrama $EI \cdot \phi$ a una escala aproximada, y a falta de trazar su "línea de cero". Ésta debe ser una línea horizontal que divida a la porción de la gráfica entre Q y P en dos áreas iguales y de signo contrario. Podríamos realizar una resolución analítica exacta, o alguna estimación aproximada. Aquí vamos a realizar una estimación basada en que la gráfica es fundamentalmente una parábola de vértice P.



La aproximación realizada ha consistido en asumir que toda la gráfica entre P y Q fuese una parábola de vértice P (solamente no lo es en un pequeño trozo contiguo a Q). Se demuestra sin dificultad que la línea que divide a una parábola como la considerada en dos áreas iguales, está a $1/3$ de la altura del trozo de parábola considerado, medido desde el vértice (P en este caso). Asimismo se demuestra sin dificultad que el punto de corte de tal línea con la parábola está a $1/\sqrt{3}=0,577$ de la anchura del trozo de parábola, nuevamente medida desde el vértice.

Finalmente, para el cálculo de los desplazamientos máximos se ha necesitado calcular el área de la función de giros entre algunos puntos:

- Entre P y el punto de giro nulo la función de giros es una parábola de vértice P. Se demuestra sin dificultad que el área de una parábola en estas condiciones es $2/3$ del área del rectángulo que la contiene.

- El tramo inicial (hasta el apoyo) de la función de giros consta de una porción cúbica y otra parabólica. A pesar de ello, su forma general es la de un rectángulo esbelto con una base menor ligeramente curva. Su área se ha aproximado por la de un rectángulo y un trozo de parábola.

Para los cálculos de resistencia de la barra, necesitaremos el momento de inercia de la sección respecto de su diámetro, así como su área:

$$I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot (1,4 \text{ cm})^4}{4} = 3,017 \text{ cm}^4 \quad ; \quad A = \pi \cdot R^2 = \pi (1,4 \text{ cm})^2 = 6,158 \text{ cm}^2$$

Tomaremos como módulo de Young para el acero $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

La sección más crítica (la de mayor momento flector) es la que está inmediatamente a la derecha de la conexión con los agarradores. En esa sección, el punto más crítico será el inferior, dado que en él se suman la tensión de compresión debida al esfuerzo axil (aunque es prácticamente despreciable), y la tensión de compresión debida al momento flector. Su valor es:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} R = \frac{-26,03 \text{ kp}}{6,158 \text{ cm}} - \frac{6282 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{3,017 \text{ cm}^4} \cdot 1,4 \text{ cm} = -4,2 - 2915,1 = -2919,3 \text{ kp/cm}^2$$

El desplazamiento mayor ocurre en el extremo izquierdo de la barra, y según nuestros resultados es $EI \cdot u^{\max} = 8,39 \text{e}6 \text{ kp} \cdot \text{cm}^3$, por tanto:

$$u^{\max} = \frac{8,39 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot \text{cm}^3}{2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \cdot 3,017 \text{ cm}^4} = 1,3 \text{ cm}$$

RESPUESTA: Los diagramas son los mostrados en la página anterior. El desplazamiento máximo vale 1,3 cm. Se trata de un valor muy alto si lo comparamos con las recomendaciones de las normas para estructuras convencionales (la recomendación $1/300$ implicaría desplazamientos de $\sim 0,5 \text{ cm}$ en nuestro caso). No obstante, los desplazamientos obtenidos probablemente son aceptables para este aparato, no afectando al confort en su uso. En cuanto al posible riesgo de plastificación, cabe decir que la tensión de 2919 kp/cm^2 obtenida no es probablemente preocupante para el acero de esta barra, que como se ha razonado en el supuesto anterior parece ser de calidad superior a la de los aceros convencionales para estructuras.

Notas:

- En cuanto a la exactitud de los resultados obtenidos: un análisis por ordenador predice un valor de $8,38e6 \text{ kp}\cdot\text{cm}^2$ para el desplazamiento del extremo izquierdo, y de $6,10e6 \text{ kp}\cdot\text{cm}^3$ para el máximo desplazamiento entre apoyos, ambos multiplicados por E·I. Esto supone diferencias del 0,1% y del 2,5% respecto de nuestros resultados. Se trata un margen de error asumible para cualquier aplicación práctica. Los valores de los diagramas de esfuerzos N, V, M, coinciden exactamente (hasta la cuarta cifra significativa), como era de esperar, ya que no hemos realizado aproximaciones en su trazado.

- En relación con la magnitud de los desplazamientos obtenidos, cabe apuntar que se trata de un campo de aplicación que no es el de las estructuras de edificación, y que las recomendaciones para “estados limite de servicio” que se aplican a éstas, pueden no ser razonables para aparatos como el analizado. De hecho, si se ha presenciado alguna competición de halterofilia, se habrán podido observar las importantes deformaciones que sufren las barras, evidentemente mayores que $1/300$ de la “luz”, a pesar de que los “apoyos” (manos del gimnasta) están relativamente cercanos a las cargas. Cabe inducir que en este ámbito de aplicación resultan aceptables deformaciones significativamente mayores que en el ámbito de las estructuras convencionales.



Supuesto 8 - solución

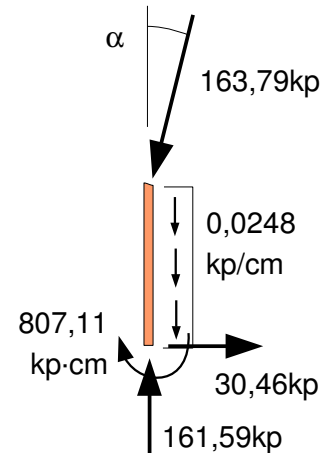
ENFOQUE: Las acciones sobre la barra vertical de apoyo fueron obtenidas en el supuesto 3, y serán utilizadas ahora para el cálculo de resistencia. En cuanto a la justificación de que el presente supuesto es menos exigente que el anterior para la barra de carga, bastará con realizar una estimación del momento flector máximo en este supuesto 8, y comparar con el supuesto 7 anterior.

Las acciones sobre la barra vertical de apoyo fueron calculadas en el supuesto 3 y se reproducen aquí por comodidad. Sin necesidad de trazar el diagrama (trácese si se necesita), es inmediato apreciar que el mayor momento flector ocurre en la sección inferior. Visto el sentido del momento, y teniendo en cuenta que existe una compresión adicional debida a esfuerzo axial, el punto más solicitado será el izquierdo de dicha sección. El cálculo de la tensión normal en este punto sigue el patrón habitual:

$$I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot (1 \text{ cm})^4}{4} = 0,785 \text{ cm}^4$$

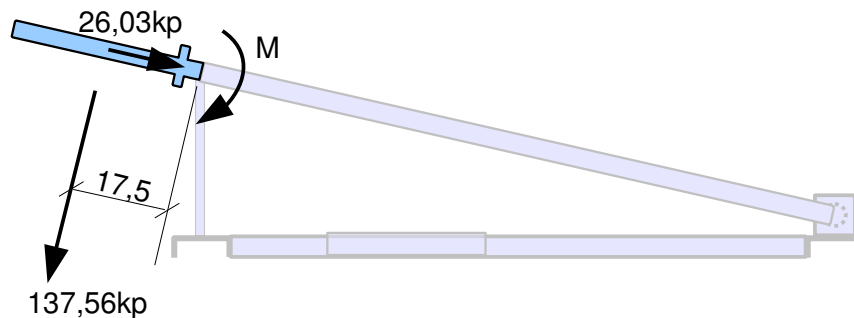
$$A = \pi \cdot R^2 = \pi (1 \text{ cm})^2 = 3,141 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} R = \frac{-161,59 \text{ kp}}{3,141 \text{ cm}^2} - \frac{807,11 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{0,785 \text{ cm}^4} \cdot 1 \text{ cm} = -51,4 - 1028,2 = -1079,6 \text{ kp/cm}^2$$



Como se ha razonado en supuestos anteriores, la tensión anterior es probablemente muy inferior al límite elástico del acero en cuestión (quizá del orden de la quinta parte del mismo).

En cuanto al orden de magnitud esperado para el momento flector máximo en la barra de carga, cabe asegurar que el mismo se producirá en la sección del apoyo proporcionado por la barra vertical (trácese el diagrama si la experiencia con problemas similares aún no hace evidente lo anterior). Aislando el trozo de barra que comprende la zona de carga y pequeño espacio restante hasta el apoyo, podemos calcular el momento flector en la sección de interés:



Tomando momentos respecto del centro de la sección considerada: $M = 137,56 \cdot 17,5 = 2407 \text{ kp} \cdot \text{cm}$, mucho menor que los $6282 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ que actuaban en el supuesto 7 anterior.

RESPUESTA: La barra vertical de apoyo no desarrolla tensiones importantes, por lo que no tememos por su posible plastificación. En cuanto a la barra de carga, la misma está más solicitada en el supuesto anterior (usuario a punto de

levantarla), por lo que sería redundante analizarla en el presente supuesto.

Notas:

Se ha mostrado que la barra vertical de carga desarrolla tensiones moderadas, en las condiciones asumidas en los cálculos. No obstante, un análisis más completo (que no es objeto de este curso) debería tener en cuenta que este elemento estará sometido a los impactos producidos por el usuario cuando termina el ejercicio y deposita, posiblemente con poco cuidado, el peso en el apoyo.

Por una parte, este efecto dinámico puede aumentar considerablemente el valor efectivo de los esfuerzos en la base de la barra vertical de apoyo, lo que debería tenerse en cuenta en el cálculo resistente. Por otra parte se da la circunstancia de que la sección inferior de la barra, en la que se desarrollan las mayores tensiones, está unida al soporte mediante soldadura. Las variaciones bruscas de tensión, de tipo impacto, tienden a deteriorar las uniones soldadas de manera particular.

No obstante, como comentario final, cabe apuntar que este aspecto del diseño se podría haber mejorado fácilmente, disponiendo la barra de apoyo formando un ángulo α con la vertical. De esta forma, la barra de apoyo no desarrollaría momento flector, reduciéndose con ello drásticamente las tensiones en toda la barra, y en la sección inferior en particular.